Cilindrične koordinate Tačku (x, y, z) prostora $\mathbb{R}^3$ možemo dodatno da odredimo trojkom $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, gdje su r, φ polarne koordinate projekcije (x, y) u $\mathbb{R}^2$ i z rastojanje date tačke do Oxy ravni. Predhodna korespondencija je jednoznačna. Veza Dekartovog koordinatnog sistema $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^3_{r\varphi z}$ ostvaruje se sljedećim jednačinama

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

gdje je $0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Dakle, $g : \mathbb{R}^3_{r\varphi z} \to \mathbb{R}^3_{xyz}$ je C^1 preslikavanje koje je bijektivno, gdje

$$dg(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i

$$|\det[dg]| = r.$$

Ukoliko je $D \subset \mathbb{R}^3_{r\varphi z}$ neki skup mjerljiv po Žordanu i f neka realna funkcija integrabilna na $g(D)$, onda prema teoremi o zamjeni promjenljivih imamo

$$\int_{g(D)} fd = \int_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Primjer 0.1. Izračunaćemo integral $\iiint_G x^2 dxdydz$ ograničenu površima $z = x^2 + y^2$, $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

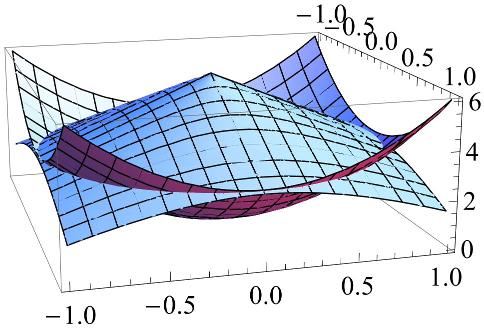
Jasno radi se oblasti ograničenom površima konusa i eliptičkog paraboloida. Odredićemo projekciju date oblasti na Oxy ravan. U tom smislu, prvo treba da odredimo (vidjeti sliku) odrgovarajuću projekciju krive koja se dobija u presjeku ovih površi. Uzimajući za smjenu $x^2 + y^2 = t^2$ iz polaznih jednačina dobijamo $t^2 = 6 - t$, odakle dobijamo dva rješenja i jasno uzimamo samo pozitivno $t = 2$, tj. $x^2 + y^2 \leq 4$ je tražena oblast u Oxy ravni.

Prelazeći na cilindrične koordinate, imamo

$$G = \{(r, \varphi, z) | 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r^2 \leq z \leq 6 - r\}.$$

Prema tome,

$$\iiint_G x dxdydz = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_{r^2}^{6-r} dz = \frac{104\pi}{15}.$$



Primjer 0.2. Naći ćemo zapreminu tijela ograničenog provršima $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$ koje označimo sa G.

Projkecija krive na $O_{x,y}$ koju dobijamo u presjeku datih površi dobijamo eliminacijom koordinate z u gornjim jednačinama, tj. $x^2 + y^2 = x + y$, odnosno $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$. U ovom slučaju uvešćemo takođe cilindrične koordinate (pomjerene)

$$x - \frac{1}{2} = r\cos\varphi, y - \frac{1}{2} = r\sin\varphi, z = z.$$

U skladu sa uvedenom smjenom za dato tijelo imamo da se odgovarajuće nalaze u sljedećim intervalima $\varphi \in [0, 2\pi)$, $r \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, dok za z koordinatu je

$$\frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2 \leq z \leq 1 + r(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Tako dobijamo

$$\mu(G) = \iiint_G dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} rdr \int_{\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2}^{1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)} zdz = \frac{\pi}{8}.$$

Primjer 0.3. Odredimo sljedeći integral

$$\iiint_T zdxdydz,$$

gdje je T oblast u $\mathbb{R}^3$ ograničena površima $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = a > 0$, $x^2 + y^2 = a^2$ $a > 0$.

Jednačinom $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ definisan je jednograni hiperboloid. Projekcija oblasti T na $O_{x,y}$ ravan je kružni prsten $\{(x, y)|a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$, a z koordinata $\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} \leq z \leq a$.

Tako, prelazeći na cilindrične koordinate imamo

$$\iiint_T zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2}} rdr \int_{\sqrt{r^2-a^2}}^{a} zdz = \frac{3}{4}\pi a^4.$$

Sferne koordinate

Svakoj tački (x, y, z) prostora $\mathbb{R}^3$ odgovara jedinstveno trojka parametara (r, φ, θ), sferene koordinate, pri čemu je veza ostvarena kroz naredne jednakosti

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta, \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta, \\ z &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

gdje $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Na taj način definišemo preslikavanje $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$g(r, \varphi, \theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta), \tag{0.1}$$

pri čemu je

$$dg(r, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\theta & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{bmatrix}$$

i

$$|\det[dg]| = r^2\sin\theta.$$

Pritom je $|\det[dg(r, \varphi, \theta)]| \neq 0$ za $r \neq 0, \theta \neq k\pi$. Ukoliko je $D \subset \mathbb{R}^3$ neki skup mjerljiv po Žordanu i f neka realna funkcija integrabilna na $g(D)$, onda prema teoremi o zamjeni promjenljivih imamo

$$\int_{g(D)} fd = \int_D f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Primjer 0.4. Izračunaćemo opet zapreminu tijela E ograničenog elipsoidom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a, b, c > 0$, ali ovog puta koristeći sferene koordinate. Naime, smjenom $x = ar\cos\varphi\sin\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$ i $z = cr\cos\theta$ zapravo određujemo preslikavanje

$$g_1(r, \varphi, \theta) = (ar\cos\varphi\sin\theta, br\sin\varphi\sin\theta, cr\cos\theta)$$

koje paralelopiped $\Pi = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ iz prostora $\mathbb{R}^3_{r\varphi\theta}$ preslikava na polaznu oblast.

Lako se provjerava da u odnosu na preslikavanje iz (0.1) važi $|det[dg_1]| = abc|det[dg]| = abcr^2\sin\theta$.

Prema tome

$$\mu(E) = \iiint_E dxdydz = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^2 dr = \frac{4\pi}{3}abc.$$

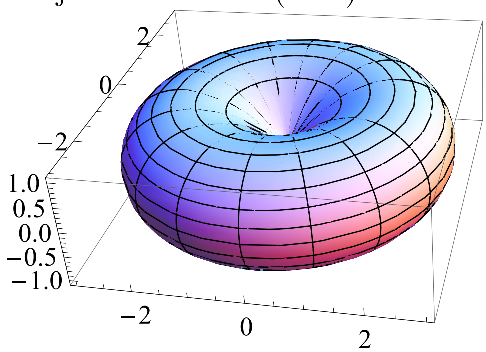
Primjer 0.5. Integral $\iiint_G zdxdydz$, gdje je G oblast ograničena $x^2+y^2+z^2 = a^2, a > 0$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ jednostavno računamo prelazeći na sferne koordinate. Naime, za $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$ i $z = r\cos\theta$ dobijamo da $r \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ i $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Tako dobijamo

$$\iiint_G zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{8}.$$

Primjer 0.6. U ovom primjeru odredićemo zapreminu tijela G ograničenog sa $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2), a > 0$.

Treba primjetiti da površ u presjeku za $z = 0$ daje kružnicu $x^2 + y^2 = a^2$, a u presjeku sa ostalim koordinatnim ravnima $x = 0$ i $y = 0$ dobijamo Bernulijevu lemniskatu u ravnima O_{yz} i O_{xz} respektivno. Samu površ dobijamo, prosto rečeno, rotacijom po kružnici $x^2+y^2 = a^2$ Bernulijeve lemniskate (slika).



Sferne koordinate $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ transformišu polaznu jednačinu u

$$r^2 = -a^2\cos(2\theta)$$

koja kada $\theta \in [0, \pi]$ ima smisla samo za $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Jasno, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Tako,

$$\begin{aligned}
&\mu(G) \\
&= \iiint_G dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} r^2 dr \\
&= \frac{2\pi a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (-\cos(2\theta))^{\frac{3}{2}} \sin\theta d\theta = \frac{4\pi a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-2\cos^2\theta)^{3/2} \sin\theta d\theta \\
&= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2t^2)^{3/2} dt = \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^1 (1-s)^{3/2} s^{-\frac{1}{2}} ds \\
&= \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{2}} B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Komentar 0.7. Napomenimo da smo u posljednjem primjeru koristili beta funkciju, u oznaci $B(\alpha, \beta)$, neelementarnu funkciju zadatu nesvosjstvenim parametarskim integralom,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt, \alpha, \beta > 0.$$

Postoji niz svojstava pomenute funkcije, na primjer da je $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$, što se jednostavno dobija smjenom $t = 1 - s$.

Dalje važi sljedeća formula

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

gdje je $\Gamma(\alpha)$, gama funkcija, takođe poznata neelementarna funkcija zadata preko nesvosjtvenog parametarskog integrala

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \alpha > 0.$$

Parcijalnom integracijom jednostavno dobijamo da važi $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$,

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}dx = (-xe^{-x})|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Kako je $\Gamma(1) = 1$, to je $\Gamma(n+1) = n!$, za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$. U tom smislu, gamma funkcija predstavlja uopštenje faktorijel funkcije.

Specijalno,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{1/2}e^{-x}dx = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi},$$

što slijedi iz Primjera 0.12.

0.1. Nesvojstveni integral. Do sada posmatrali smo integrale ograničenih funkcija na Žordan mjerljivim skupovima koji su svakako i ograničeni. U ovom odjeljku bavićemo se slučajevima integracije na neograničenim oblastima ili slučajevima kada podintegralna funkcija nije ograničena na oblasti integracije.

Podsjetimo se da za realnu funkciju $f(x)$ definisanu na odsječku $[a, +\infty)$ i integrabilnu na svakom segmentu $[a, A]$, $a < A + \infty$ funkcija

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx$$

je definisana i neprekidna na $[a, +\infty)$. Ako postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = L,$$

kažemo da nesvojstveni integral $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergira .

Takođe, ako je $f(x)$ definisana na odsječku $(a, b]$ gdje $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ i $f(x)$ je integrabilna na svakom podsegmentu $[\alpha, b]$, $a < \alpha < b$ funkcija $F(\alpha) = \int_\alpha^b f(x)dx$ je neprekidna na svakom odsječku $[\alpha, b]$. Ako postoji granična vrijednost

$$\lim_{\alpha\to a^+} F(\alpha)$$

nazivamo je nesvojstvenim integralom funkcije $f(x)$ na odsječku $(a, b]$.

Postavlja se pitanje kako prenijeti pokrivanje odsječka $[a,+\infty)$ segmentima $[a,A]$ i poluintervala $(a,b]$ segmentima $[a,b]$ na slučaj neograničene oblasti u $\mathbb{R}^n$ ili Žordan mjerljive oblasti i nograničene funkcije. Oba slučaja u nastavku će biti razmotrena istovremeno.

Definicija 0.8. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast. Familija oblasti $\{V_k | k = 1,2,...\}$ nazivamo monotonim pokrivačem oblasti Ω ako
a) V_k je Žordan mjerljiv skup;
b)$\cup_{k=1}^{\infty} V_k = \Omega$;
c)$\overline{V_k} \subset V_{k+1}$ za $k = 1,2...$

Primjer 0.9. a) Jednostavno se provjerava da je familija $\{(x,y,z)| - n < x,y,z < n\}$, $n \in \mathbb{N}$ monoton pokrivač prostora $\mathbb{R}^3$.

b) Familija $\{(x,y)|x^2+y^2 < 1 - \frac{1}{k^2}\}$, $k \in \mathbb{N}$, predstavlja monoton prekrivač skupa $D = \{(x,y)|x^2+y^2 < 1\}$.

Definicija 0.10. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ realna funkcija takva da je f integrabilna na svakom Žordan mjerljivom podskupu od Ω. Kažemo da nesvojstveni integral

$$\int_{\Omega} f(x)dx$$

konvergira ako postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\overline{V}_k} f(x)dx$$

za svaki monotoni prekrivač $\{V_k\}_{k\geq 1}$ skupa Ω, koja ne zavisi od izbora monotonog prekrivača skupa Ω.

Sljedeća teorema odnosi se na konvergenciju nesvojstvenog integrala nenegativne funkcije.

Teorema 0.11. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0, x \in \Omega$. Potreban i dovoljan uslov da nesvojstveni integral $\int_{\Omega} f(x)dx$ konvergira je da za bar jedan monotoni prekrivač $\{V_k\}_{k\geq 1}$ skupa Ω niz $a_k = \int_{\overline{V}_k} f(x)dx$ je ograničen.*

Proof. Ako $\int_{\Omega} f(x)dx$ konvergira, onda jasno da prema predhodnoj definiciji je i niz a_k ograničen.

Obratno, ako je niz $\{a_k\}_{k\geq 1}$ ograničen, budući da je to monotoni niz jer

$$0 \leq a_k = \int_{\overline{V}_k} f(x)dx \leq \int_{\overline{V}_{k+1}} f(x)dx = a_{k+1},$$

to je isti i konvergentan, tj. postoji konačna granična vrijednost $I = \lim_{k\to\infty} \int_{\overline{V}_k} f(x)dx$.

Ostaje da se provjeri da li je vrijednost I nezavisna od izbora monotonog prekrivača skupa Ω.

U tom cilju, neka je $\{D_k\}_{k\geq 1}$ monotoni prekrivač skupa Ω. Tada za proizvoljno $k_0 \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je $\overline{D}_{k_0} \subset V_m$. Zaista, iz činjenice da je $\overline{D}_{k_0}$ je kompaktan skup i $\overline{D}_{k_0} \subset \cup_{l=1}^{\infty} V_l$ slijedi da da postoji konačano potpokrivanje skupa $\overline{D}_{k_0}$ iz familije $\{V_l\}_{l\geq 1}$, tj. $\overline{D}_{k_0} \subset \cup_{d=1}^{p} V_{l_d}$, gdje je p neki prirodan broj. Sa druge strane,

$$\overline{V}_{l_1} \subseteq \cdots \subseteq \overline{V}_{l_1} \subset V_{l_d+1}.$$

Prema tome, $\overline{D}_{k_0} \subset V_m$, gdje je $m = l_d + 1$.

Na taj način dobijamo,

$$\int_{\overline{D}_{k_0}} f(x)dx \leq \int_{\overline{V}_m} f(x)dx \leq \lim_{k\to\infty} \int_{\overline{V}_k} f(x)dx = I.$$

Drugačije rečeno, nenegativni niz $\{\int_{\overline{D}_k} f(x)dx\}_{k\geq 1}$ je ograničen, pa prema tome budući da je monoton i konvergentan, tj. postoji $\lim_{k\to\infty} \int_{\overline{D}_k} f(x)dx = J$ i jasno $J \leq I$.

Na isti način, zamjenjujući uloge monotonih prekrivača $\{V_k\}_{k\geq 1}$ i $\{D_k\}_{k\geq 1}$ dobijamo da je $I \leq J$, tj. $I = J$. $\square$

PRIMJER 0.12. (**Ojler-Poasonov integral**) U cilju da izračunamo integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

posmatraćemo monotoni pokrivač $V_k = \{(x,y)|x^2 + y^2 < k^2\}$, $k = 1, 2, ...$ Tada koristeći smjenu promjenljivih preko polarnih koordinata integral

$$\iint_{\overline{V_k}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

postaje

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k re^{-r^2} dr = \pi(1 - e^{-k^2}).$$

Prema Teoremi 0.11 nesvojstveni integral $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$ konvergira i

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{k\to\infty} \iint_{\overline{V_k}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \pi.$$

Sa druge strane, posmatramo monotoni pokrivač $\{E_k\}_{k\geq 1}$ gdje je $E_k = \{(x,y)| -k < x < k, -k < y < k\}$. Tada, opet prema Teoremi 0.11

imamo

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy &= \lim_{k\to\infty}\iint_{\overline{E_k}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k} e^{-x^2}dx \int_{-k}^{k} e^{-y^2}dy \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\int_{-k}^{k} e^{-x^2}dx\right)^2 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Zaključujemo da je

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.
$$

PRIMJER 0.13. U zavisnosti od parametra $p \in \mathbb{R}$ ispitajmo konvergenciju integrala

$$
\iint_D \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^p},
$$

gdje je $D = \{(x,y)|x^2+y^2 < 1\}$. Ukoliko je $p \leq 0$, integral jasno konvergira. Uočimo monotoni pokrivač $D_\rho = \{(x,y)|x^2+y^2 < \rho^2\}$, $0 < \rho < 1$. Uvodeći polarne koordinate dobijamo

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^p} &= \lim_{\rho\to 1^-}\iint_{D_\rho} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^p} \\
&= \lim_{\rho\to 1^-}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho} \frac{rdr}{(1-r^2)^p} \\
&= \pi \lim_{\rho\to 1^{-1}}\int_{1-\rho^2}^{1} \frac{ds}{s^p},
\end{aligned}
$$

i

$$
\pi \lim_{\rho\to 1^{-1}}\int_{1-\rho^2}^{1} \frac{ds}{s^p} = \begin{cases} \frac{\pi}{1-p}, & p < 1, \\ \infty, & p \geq 1 \end{cases}
$$

tj. integral konvergira za svako $p < 1$ i divergira za $p > 1$.

PRIMJER 0.14. $\iint_D \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}dxdy$, gdje je $D = \{(x,y)|0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Primijetimo da je funkcija $f(x,y) = \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ dobro definisana i pozitivna u skupu D, pri čemu $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \infty$. Uočimo monotoni pokrivač $D_\rho = \{(x,y)|\rho^2 < x^2+y^2 < 1\}$, $0 < \rho < 1$, skupa D. Koristeći smjenu polarnim koordinatama i koristeći poznatu nejednakost $\ln(1+x) < x, x > 0$, nalazimo

$$
\begin{aligned}
\iint_{D_\rho} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}dxdy &= 2\pi\int_\rho^1 \frac{\ln(1+r^2)}{r^3}rdr \\
&\leq 2\pi,
\end{aligned}
$$

tj. kontiunalni niz $a_\rho = \iint_{D_\rho} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} dxdy$ je ograničen, pa je prema Teoremi 0.11 nesvojstveni integral $\iint_{D} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} dxdy$ konvergentan.

1. Krivolinijski integral

1.1. Kriva u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.1. a) Kriva γ u $\mathbb{R}^n$ je svako neprekidno preslikavanje $f = \gamma(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$, iz nekog intervala $[a, b]$ na γ^* $(\gamma^* = \{\gamma(t)|a \leq t \leq b\})$. Tačke $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ nazivamo početnom i krajnjom tačkom krive γ. Kriva γ je zatvorena ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$.

b) Za krivu γ kažemo da je prosta kriva kad god je preslikavanje $f = \gamma(t)$ "$1-1$" na $[a, b]$. Za krivu γ kažemo da je Žordanova kriva ako je γ prosta zatvorena kriva, tj. $f = \gamma(t)$ je neprekidna, "$1-1$", na poluintervalu $[a, b)$ i $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Treba uočiti da predhodna definicija određuje krivu γ kao preslikavanje, a ne kao geometrijski objekat, tj. skup slika preslikavanja γ koji smo označili sa γ^*.

Primjera radi, krive

$$\gamma_1, \gamma_1(t) = (t, t^3), 0 \leq t \leq 1$$

i

$$\gamma_2, \gamma_2(t) = (t^2, t^6), 0 \leq t \leq 1,$$

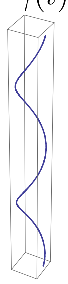
imaju iste nosače, ali se prema predhodnoj definiciji radi o različitim krivama.

Specijalno, krive u prostoru $\mathbb{R}^3$ zapisujemo najčešće

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I, \tag{1.1}$$

gdje je $I \subset \mathbb{R}$ interval parametrizacije (1.1).

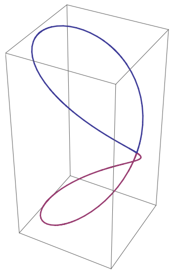
Primjer 1.2. $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$, gdje $a, b > 0$,



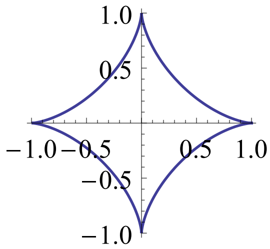
tzv. "zavojnica".

Primjer 1.3. Vivijanijevu krivu dobijamo u presjeku sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$ i cilindra $x^2 + y^2 = ax$. Njena parametrizacija je onda data sa

$$\{(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sin t, \pm a\sin\frac{t}{2}), t \in [0, 2\pi]\}.$$



Za krivu γ kažemo da je glatka ako $x, y, z \in C^1(I)$. Dodatno, kriva γ je dio po dio glatka (i neprekidna) ako su $x, y, z \in C(I)$ i interval I se može razbiti na konačan broj podintervala na kojima su restrikcije funkcija x, y, z neprekidno diferencijabilne (slika).



Navedimo i mehaničku interpretaciju krive. Naime, krivu γ možemo da zapišemo

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, t \in I,$$

gdje je $\vec{r}(t)$ vektor položaja u trenutku t materijalne tačke koja se kreće po putanji γ^*.

Definicija 1.4. Za krive γ_1, $\gamma_1(t), a \leq t \leq b$, γ_2, $\gamma_2(t), c \leq t \leq b$ kažemo da su pravilno ekvivalentne ako i samo ako $\gamma_2(u) = \gamma_1(\varphi(u)), u \in [c, d]$, gdje je $t = \varphi(u)$ strogo rastuća neprekidna (bijektivna) funkcija iz $[c, d]$ na $[a, b]$. Odnosno, γ_1 i γ_2 su nepravilno ekvivalentne ako i samo ako $\gamma_2(u) = \gamma_1(\varphi(u)), u \in [c, d]$, gdje je $t = \varphi(u)$ strogo opadajuća neprekidna (bijektivna) funkcija iz $[c, d]$ na $[a, b]$. U oba slučaja kažemo da su krive ekvivalentne.

Treba primijetiti da proste krive koje imaju isti nosač su ekvivalentne. Tako na skupu svih prostih krivih koje imaju isti nosač relacija "ekvivalentne" iz predhodne definicije je relacija ekvivalencije, što se lako pokazuje i ona razbija skup svih polaznih krivih na dvije klase ekvivalencije, pravilno ekvivalentne i nepravilno ekvivalentne. Svaka od ove dvije klase ekvivalencije zadaje orijentaciju krive.

U ravni za orijentaciju proste zatvorene krive suprotnu od smjera kretanja kazaljke na časovniku kažemo da je ta kriva pozitivno orijentisana (materijalna tačka se kreće po nosaču krive tako da oblast ograničena krivom ostaje sa lijeve strane), odnosno negativno orijentisana ukoliko sa porastom parametra $t \in I$ materijalna tačka se kreće u smjeru kazaljke na časovniku.

Primjera radi, kriva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, čiji je nosač jedinična kružnica, je pozitivno orijentisana.

1.2. Dužina krive. U tekstu koji slijedi daćemo neformalan dokaz formule za izračunavanje dužine krive. Razumije se da posmatramo samo rektifikabilne krive, pojam poznat iz predhodnog kursa analize.

U tom smislu, pretpostavimo da je γ glatka kriva

$$\gamma : [a,b] \to \gamma^* \subset \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)). \tag{1.2}$$

bez singularnih tačaka $((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 > 0)$ i bez samopresjeka. Dužinu krive γ označavamo sa $l(\gamma)$. Neka je T podjela segmenta $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ koja indukuje i odgovarajuću podjelu na podlukove $\widehat{M_{i-1}M_i}$, gdje je $M_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$, $i = 0, ..., n$.

Dijametar podjele T krive γ, u oznaci $\lambda(T)$, definišemo na način

$$\lambda(T) = \max_{1 \le i \le n} l_\gamma(\widehat{M_{i-1}M_i}),$$

gdje sa $l_\gamma(\widehat{M_{i-1}M_i})$ označavamo dužinu krive (luka) sa krajnjim tačkama M_{i-1} i M_i na krivoj γ.

Sa Π_n označimo uniju segmenata $[M_{i-1}, M_i]$, $i = 1, ..., n$ i sa $l(\Pi_n)$ odgovarajuću dužinu te dio po dio glatke krive.

Ako $\lambda(T) \to 0$, onda to povlači i da $\max_{1 \le i \le n} |t_{i-1} - t_i| \to 0$.

Prema tome, kako je kriva γ rektifikabilna to

$$l(\gamma) = \lim_{\lambda(T) \to 0} l(\Pi_n). \tag{1.3}$$

Sa druge strane, koristeći Lagranžovu teoremu o srednjim vrijednostima na segmentu, dužinu segmenta $[M_{i-1}, M_i]$, $i = 1, ..., n$ možemo da predstavimo

$$\begin{aligned} &\|(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) - (x(t_{i-1}), y(t_{i-1}), z(t_{i-1}))\| \\ &= \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\nu_i))^2 + (z'(\zeta_i))^2}(t_i - t_{i-1}), \end{aligned} \tag{1.4}$$

gdje $t_{i-1} \le \xi_i, \nu_i, \zeta_i \le t_i$. Označimo sa $g(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ neprekidnu funkciju definisanu na $[a,b]$.

Jasno da za dovoljno malo $\lambda(T)$, tj. dovoljno malo $\max_{1 \le i \le n} |t_{i-1} - t_i|$ zbog ravnomjerne neprekidnosti funkcije g na $[a,b]$, dužina $l(\Pi_n)$ se razlikuje od sume $\sum_{i=1}^n g(t_i)(t_i - t_{i-1})$ za proizvoljno mali pozitivan broj, odnosno

$$l(\gamma) = \lim_{\lambda(T) \to 0} l(\Pi_n) = \lim_{\max_{1 \le i \le n} |t_{i-1} - t_i| \to 0} \sum_{i=1}^n g(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b g(t)dt.$$

Dakle, pokazali smo

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt. \tag{1.5}$$

Formula (1.5) važi u slučaju da je kriva γ dio po dio glatka kriva.

Može se postaviti pitanje da li formula (1.5) zavisi od izbora parametrizacije krive. Pokazuje se da je definicija dužine krive dobro definisana što je rezultat naredne teoreme.

TEOREMA 1.5. *Formula* (1.5) *je nezavisna od parametrizacije krive* γ.

PROOF. Neka je $\gamma^* = \{(x(t), y(t), z(t)) | a \le t \le b\} = \{(u(s), v(s), w(s)) | c \le s \le d\}$, pri čemu postoji neprekidna monotona bijekcija $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ i

$$x(\varphi(s)) = u(s), y(\varphi(s)) = v(s), z(\varphi(s)) = w(s).$$

Tada na osnovu teoreme o smjeni promjenljivih u određenom integralu imamo

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt \\ &= \int_c^d \sqrt{(x'(\varphi(s)))^2 + (y'(\varphi(s)))^2 + (z'(\varphi(s)))^2}|\varphi'(s)|ds \\ &= \int_c^d \sqrt{(u'(s))^2 + (v'(s))^2 + (w'(s))^2}ds. \end{aligned}$$

□

1.3. Krivolinijski integral prve vrste. Za predhodno zadatu krivu γ, koja je dio po dio glatka, pretpostavimo da je funkcija $f : \gamma^* \to \mathbb{R}$ definisana i ograničena na γ^*. Polazeći od podjele T segmenta $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

i tačaka $\{M_i\}_{i=0}^n$, $M_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ koje razbijaju krivu γ na podlukove $\widehat{M_{i-1}M_i}$, biramo $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ i tačku $\tilde{M}_i(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \in \widehat{M_{i-1}M_i}$. Formiramo integralnu sumu

$$\sigma(f, \gamma, T) = \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) l_\gamma(\widehat{M_{i-1}M_i}). \tag{1.6}$$

DEFINICIJA 1.6. Ako postoji konačna granična vrijednost sume (1.6) kada $\max_{1\le i\le n} l_\gamma(\widehat{M_{i-1}M_i})$ teži ka nula,tj.

$$\lim_{\max_{1\le i\le n} l_\gamma(\widehat{M_{i-1}M_i}) \to 0} \sigma(f, \gamma, T) = \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) l_\gamma(\widehat{M_{i-1}M_i}) = I,$$

onda broj I nazivamo krivolinijskim integralom prve vrste funkcije f po krivoj γ i označavamo sa

$$\int_\gamma f(x,y,z)dl.$$

Predhodna definicija u suštini govori da broj I koji dobijamo kao graničnu vrijednost integralne sume $\sigma(f,\gamma,T)$ ne zavisi od izbora istaknutih tačaka i podjele T, odnosno za proizvoljno $\epsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podjelu T takvu da je $\lambda(T) < \delta$ slijedi da je

$$|I - \sigma(f,\gamma,T)| < \epsilon.$$

Jasno ako je funkcija f neprekidna na γ^* onda će da postoji i odgovarajući krivolinijski integral $\int_\gamma f(x,y,z)dl$.

Iz same definicije krivolinijskog integrala prve vrste vidimo da on ne zavisi od orijentacije krive, tj. ako je γ dio po dio glatka kriva bez samopresjeka tako da $A = \gamma(a)$ i $B = \gamma(b)$ su krajnje tačke krive γ. Ako sa AB označimo krivu sa nosačem γ^* orijentisanu u smjeru od tačka A do B, i sa BA označimo krivu krivu sa istim nasačem, ali orijentisanu u smjeru od B prema A. Tada za neku neprekidnu funkciju f imamo

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{BA} f(x,y,z)dl.$$

Generalno, za krivolinijski integral prve vrste važe neka opšta svojstva karakterestična za određen Rimanov integral.

Sljedeća teorema daje pregled svojstava krivolinijskog integrala koja se dokazuju jednostavno pozivajući se na osnovnu definiciju krivolinijskog integrala.

Teorema 1.7. *Neka je γ dio po dio glatka kriva bez samopresjeka i singularnih tačaka tako da su njene krajnje tačke, $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$ i $f, g : \gamma^* \to \mathbb{R}$ su ograničene funkcije za koje postoje $\int_\gamma f(x,y,z)dl$ i $\int_\gamma g(x,y,z)dl$. Tada važi*

a)$\int_\gamma (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))dl = \alpha \int_\gamma f(x,y,z)dl + \beta \int_\gamma g(x,y,z)dl$, *gdje* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Ako je $C \in \gamma^*$, onda

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{AC} f(x,y,z)dl + \int_{CB} f(x,y,z)dl.$$

c)$\left|\int_\gamma f(x,y,z)dl\right| \le \int_\gamma |f(x,y,z)|dl.$

d)Ako je $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \gamma^*$, onda

$$\int_\gamma f(x,y,z)dl \le \int_\gamma g(x,y,z)dl.$$

e) Ako je f neprekidna funkcija γ^*, onda postoji tačka $(\xi, \eta, \zeta) \in \gamma^*$ tako da

$$\int_\gamma f(x,y,z)dl = f(\xi,\eta,\zeta)l(\gamma).$$

U sljedećoj teoremi data je formula za računanje krivolinijskog integrala prve vrste

TEOREMA 1.8. *Neka je γ kriva zadata u* (1.2) *koja je glatka i nema singularnih tačaka i $f : \gamma^* \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija. Tada važi formula*

(1.7)
$$\int_\gamma f(x,y,z)dl = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt.$$

PROOF. Neka je T podjela segmenta $[a,b]$, data sa $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ koja indukuje podjelu na krivoj γ određene tačkama $A_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$za $i = 1, ..., n$. Takođe, za izabrane tačke $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, formiramo integralnu sumu $\sigma(f, \gamma, T)$ na način

(1.8)
$$\begin{aligned}\sigma(f,\gamma,T) &= \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))l_\gamma(A_{i-1}A_i)\\ &= \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt\end{aligned}$$

Sa druge strane, integral

$$J = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt,$$

možemo da zapišemo na način

$$J = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt.$$

Zbog pretpostavljene neprekidnosti funkcije f, tj. ravnomjerne neprekidnosti koordinatnih funkcija x, y, z na segmentu $[a,b]$, to je i funkcija $t \to f(x(t), y(t), z(t))$ je takođe ravnomjerno neprekidna na segmentu $[a,b]$. Ukoliko sa l označimo dužinu krive γ, to za proizvoljni $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za $t, t' \in [a,b]$ takve da

$$|t-t'| < \delta \Rightarrow |f(x(t),y(t),z(t)) - f(x(t'),y(t'),z(t'))| < \frac{\epsilon}{2l}.$$

Uzimajući da je dijametar podjele $\lambda(T) < \delta$, dobijamo sljedeću nejednakost

(1.9)

$$
\begin{aligned}
&|\sigma(f,\gamma,T) - J| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(x(t),y(t),z(t)) - f(x(t_i),y(t_i),z(t_i))| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \\
&\le \frac{\epsilon}{2l} \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Treba primijetiti da ako $\lambda(T) \to 0$, onda i $\max_{1\le i\le n} |t_i - t_{i-1}| \to 0$, što slijedi zbog iz neprekidnosti funkcija x, y, z na segmentu $[a,b]$ i nepostojanja singularnih tačaka krive γ,

$$0 < m = \min_{a\le t\le b} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

i

$$l_\gamma(A_{i-1}A_i) \ge m \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt = m(t_i - t_{i-1}),$$

što povlači

$$\lambda(T) \ge m \max_{1\le i\le n} |t_i - t_{i-1}|.$$

Zbog integrabinosti funkcije f, za integral $I = \int_\gamma f(x,y,z)dl$ i $\frac{\epsilon}{2}$ postoji δ_1 tako da za svaku podjelu T' krive γ, takvu da je $\lambda(T) < \delta_1$, slijedi da je $|I - \sigma(f,\gamma,T')| < \frac{\epsilon}{2}$.

Birajući za dijametar nove podjele T'' krive γ da je $\lambda(T'') < \min\{\delta, \delta_1\}$ imamo

$$|I - J| \le |I - \sigma(f,\gamma,T'')| + |\sigma(f,\gamma,T'') - J| < \epsilon,$$

tj. $I = J$.

$\square$

Primjer 1.9. Izračunaćemo obim kružnice poluprečnika r, $k = \{(x,y)|x^2+y^2 = r^2\}$. Koristeći parametrizaciju $x = r\cos t, y = r\sin t, t \in [0, 2\pi)$ dobijamo

$$l(k) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} dt = 2r\pi.$$

Primjer 1.10. Odredićemo integral $I = \int_L (x^2+y^2)dl$, gdje je L granica trougla određenog tjemenima $A(0,0)$, $B(0,2)$ i $C(1,1)$.

Jasno,

$$\int_L (x^2+y^2)dl = \int_{\overline{AB}} (x^2+y^2)dl + \int_{\overline{CB}} (x^2+y^2)dl + \int_{\overline{AC}} (x^2+y^2)dl,$$

gdje su $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ stranice (segmenti) datog trougla.

Odgovarajuće parametrizacije segmenata je jednostavno odrediti,

$$\overline{AB} = \{(t,0) | 0 \le t \le 2\} \text{ i } \int_0^2 t^2 dt = \frac{8}{3},$$

$$\overline{CB} = \{(t,2-t) | 1 \le t \le 2\} \text{ i } \sqrt{2}\int_1^2 t^2 + (2-t)^2 dt = \frac{8\sqrt{2}}{3},$$

$$\overline{AC} = \{(t,t) | 0 \le t \le 1\} \text{ i } 2\sqrt{2}\int_1^2 t^2 dt = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

i $I = \frac{10\sqrt{2}+8}{3}$.

Primjer 1.11. Izračunajmo krivolinijski integral $\int_L xydl$, gdje je L dio elipse u prvom kvadrantu, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $0 < b < a$. Prelazeći na parametrizaciju $x = a\cos t, y = b\sin t$, dobijamo

$$\begin{aligned} \int_L xydl &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} dt \\ &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2} dt \end{aligned} \tag{1.10}$$

Smjenom $s = (a^2-b^2)\sin^2 t + b^2$ dobijamo $\sin t \cos t dt = \frac{ds}{2(a^2-b^2)}$ i posljednji integral se svodi

$$\begin{aligned} ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2} dt &= \frac{ab}{2(a^2-b^2)} \int_{b^2}^{a^2} \sqrt{s} ds \\ &= \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}. \end{aligned}$$

Primjer 1.12. Izračunaćemo integral $\int_L ydl$, gdje je $L = \{(x,y,z) | (x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2, (x-b)^2 + y^2 = b^2, z \ge 0\}$, $0 < b < a$.

Parametrizacija krive L je data sa

$$x-b = b\cos t, y = b\sin t, z = \sqrt{a^2-(x-a)^2-y^2} = \sqrt{2b(a-b)(1+\cos t)},$$

za $0 \le t \le 2\pi$ i

$$x'(t) = -b\sin t, y'(t) = b\cos t, z'(t) = -\frac{b(a-b)\sin t}{\sqrt{2b(a-b)(1+\cos t)}}.$$

Tako dobijamo

(1.11)

$$\int_L ydl$$
$$= \int_0^{2\pi} b\sin t\sqrt{b^2 + \frac{b(a-b)}{2}(1-\cos t)}dt$$
$$= \int_0^{\pi} b\sin t\sqrt{b^2 + \frac{b(a-b)}{2}(1-\cos t)}dt + \int_{\pi}^{2\pi} b\sin t\sqrt{b^2 + \frac{b(a-b)}{2}(1-\cos t)}dt$$
$$= b\int_{-1}^{1} \sqrt{b^2 + \frac{b(a-b)}{2}(1-s)}ds - b\int_{-1}^{1} \sqrt{b^2 + \frac{b(a-b)}{2}(1-s)}ds$$
$$= 0.$$